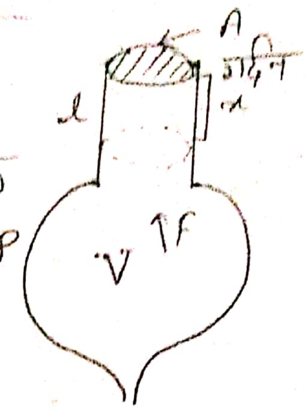
UNIT - III

Topics :-

- → Bifilar oscillations.
- → Helmholtz resonator.
- → LC Circuit.
- → Vibrations of magnet.
- → Oscillations of two masses connected by a spring.
- → Superposition of two simple harmonic motions of the same frequency.
- → Lissajous figures.
- → Damped harmonic oscillator.
- → Case of different frequencies.
- → Power dissipation.
- → Quality factor.
- → Examples.
- → Driven (forced) harmonic oscillator.
- → Transient and steady states.
- → Power absorption resonance.

हेल्महोल्ट्ज अनुनादक (Helmholtz resonator) :-



माना कि इसके गर्दन पर अनुप्रस्थ से अन्दर की ओर x दूरी तक विस्थापित करने पर अनुनादक के हवा के आयतन में परिवर्तन होगा !-

$$v = Ax \quad \text{—} (1)$$

अत: अनुनादक के अन्दर हवा का दाब P है नीचे की ओर प्रतिबल लगाने पर उत्पन्न विकृति होगा !-

प्रतिबल (Stress) ∝ विकृति (Strain)

$$\Rightarrow \text{Stress} = K\,\text{Strain}$$

[जहाँ K = प्रत्यास्थता गुणांक है]

$$\Rightarrow K = \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{P}{\frac{v}{V}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{Kv}{V} \quad \text{—} (2)$$

अत: आयतन में कमी होने से अनुनादक के अंदर के दाब में वृद्धि हुआ तो दाब P के कारण गर्दन की ओर प्रत्यानयन बल लगेगा !-

(प्रत्यानयन बल) Restoring force $F = -PA \quad \text{—} (3)$

समी० (2) से समी० (3) में P का मान रखने पर !-

$$F = \frac{-KvA}{V} \quad \text{—} (4)$$

समी॰ 4 मे v का मान रखने पर:-

$$F = \frac{-KA^2 x}{V} \quad \text{— (5)}$$

गर्दन की हवा का द्रव्यमान $m = lA\rho$

गर्दन की हवा के गति का समी॰:-

$$F = ma$$

$$\Rightarrow \frac{-KA^2 x}{V} = lA\rho \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-KA}{V} x = l\rho \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-KA}{Vl\rho} x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{KA}{Vl\rho} x = 0} \quad \text{— (6)}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \left[\omega^2 = \frac{KA}{Vl\rho} \right.$$

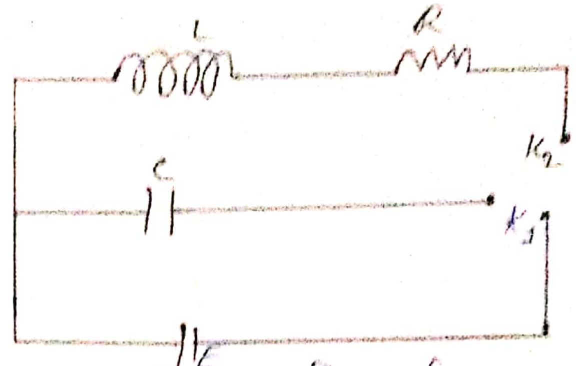
समी॰ 6 ही हेल्महोल्ट्ज का समीकरण है।

(आवर्तकाल) Timeperiod $= \frac{2\pi}{\omega}$

$$= \boxed{2\pi \sqrt{\frac{Vl\rho}{KA}}} \quad \text{— (7)}$$

(11)

LC परिपथ में संधारित्र के विसर्जन के दोलन (Oscillations of discharge of capacitor in LC circuit):-



माना C धारिता के एक संधारित्र को सर्वप्रथम E विद्युत वाहक बल (emf) की बैटरी द्वारा कुंजी K_1 में लगाकर आवेशित किया जाता है। तत्पश्चात कुंजी K_1 में से प्लग निकालकर तथा कुंजी K_2 में प्लग लगाकर संधारित्र को नगण्य प्रतिरोध तथा स्वप्रेरकत्व कुण्डली L से विसर्जित किया जाता है।

माना प्रारम्भ में ($t=0$) संधारित्र में आवेश q_0 है। किसी क्षण t पर संधारित्र पर आवेश q है तथा विसर्जन धारा I है। संधारित्र के प्लेटों के बीच विभवान्तर $= \frac{q}{C}$

प्रेरकत्व के सिरों पर प्रेरित emf $= -L\frac{dI}{dt}$

अतः किरचॉफ के नियम से:-

$$\Rightarrow \frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} = L\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{LC} = \frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{LC} - \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{LC}q - \frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0 \quad \left[\because I = \frac{dq}{dt}\right]$$

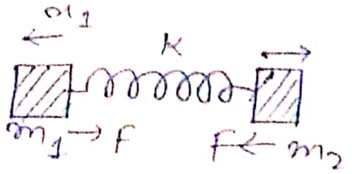
$$\Rightarrow \frac{1}{LC}q + \frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0$$

$$\left[\because \omega^2 = \frac{1}{LC}\right]$$

(आवर्तकाल) T timeperiod $= \frac{2\pi}{\omega}$
$= 2\pi\sqrt{LC}$

(3) स्प्रिंग के सिरों पर जुड़े दो द्रव्यमानों की गति:-
(Motion of two masses connected at the ends of a spring):-



माना m_1 व m_2 द्रव्यमान के दो पिण्ड एक द्रव्यमान रहित स्प्रिंग के सिरों पर जुड़े हैं तथा वे स्प्रिंग की लंबाई के अनुदिश कम्पन करते हैं। इसमें से किसी एक पिण्ड को अपनी साम्य स्थिति से थोड़ा-सा विस्थापित करने पर स्प्रिंग या तो लम्बाई में सिकुड़ती है या लम्बाई में बढ़ती है। जिससे दोनों पिण्डों पर रेखीय प्रत्यानयन बल लगने लगता है तथा दोनों पिण्ड द्रव्यमान केंद्र के सापेक्ष अपनी-अपनी साम्य स्थितियों के दोनों ओर सरल आवर्त गति में कम्पन करने लगते हैं।

माना m_1 व m_2 द्रव्यमान के पिण्डों का विस्थापन क्रमशः x_1 व x_2 है, तो

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{— (1)}$$

स्प्रिंग द्वारा प्रत्येक द्रव्यमान पर अन्दर की ओर (प्रत्यानयन बल) Restoring force $F = -Kx$ — (2)

तथा m_1 व m_2 द्रव्यमान के पिण्डों की गति के समीकरण निम्न होंगे:-

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -Kx \quad \text{तथा} \quad m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -Kx \quad \text{— (3)}$$

(12)

समी० (1) का आंशिक रूप से दो बार अवकलन करने पर।

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2}$$

समी० (3) से मान रखने पर।

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-Kx}{m_1} + \left(\frac{-Kx}{m_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \quad — (4)$$

माना $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-Kx}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{\mu}x = 0 \quad — (5)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \left[\because \omega^2 = \frac{K}{\mu}\right]$$

(आवर्तकाल) Time period $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{K}}$ — (6)

(2) एक समान चुंबकीय क्षेत्र में लटके चुम्बक की गति (motion of a magnet suspended in a uniform magnetic field):-

Book

(2)

सरल आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण
(Superposition of Simple Harmonic Oscillations)

अध्यारोपण का सिद्धांत (Principal of Superposition) :-

जब दो समान आवृत्ति की सरल आवर्त तरंग (गति) जिनकी आवृत्ति बराबर हो जब आपस में मिलती है तो परिणामी तरंग का आयाम दोनों अलग-अलग तरंगों के बीजगणितीय योग के बराबर होता है।

(1) व्यतिकरण की गणितीय विवेचना :-

माना पहले आयाम का विस्थापन -

$\Rightarrow x_1 = a_1 \sin \omega t$ — (1)

दूसरे आयाम का विस्थापन -

$\Rightarrow x_2 = a_2 \sin(\omega t + \phi)$ — (2)

अध्यारोपण के सिद्धांत से -

$x = x_1 + x_2$

$\Rightarrow x = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin(\omega t + \phi)$

$\Rightarrow x = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin \omega t \cos\phi + a_2 \cos\omega t \sin\phi$

$\Rightarrow x = (a_1 + a_2 \cos\phi) \sin \omega t + a_2 \cos\omega t \sin\phi$ — (3)

(माना कि) Let :-

$\Rightarrow a_1 + a_2 \cos\phi = a \cos\theta$ — (4)

$\Rightarrow a_2 \sin\phi = a \sin\theta$ — (5)

समी० (3) में मान रखने पर :-

$\Rightarrow x = a \sin \omega t \cos\theta + a_2 \cos\omega t \sin\theta$

$\Rightarrow x = a[\sin \omega t \cos\theta + \cos\omega t \sin\theta]$

$\Rightarrow x = a \sin(\omega t + \theta)$ — (6)

अध्यारोपण के पश्चात परिणामी तरंग का समीकरण है

समी० (4) और (5) को वर्ग करके जोड़ने पर :-

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow (a_1 + a_2 \cos\phi)^2 + a_2^2 \sin^2\phi = a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta$

$\Rightarrow (a_1 + a_2\cos\phi)^2 + a_2^2\sin^2\phi = a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2\cos^2\phi + 2a_1a_2\cos\phi + a_2^2\sin^2\phi = a^2$

$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + 2a_1a_2\cos\phi = a^2$

$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\phi = a^2$

$\Rightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\phi}$ — (7)

समी॰ (5) में समी॰ (4) को भाग देने पर:-

$\Rightarrow \frac{\cancel{a}\sin\theta}{\cancel{a}\cos\theta} = \frac{a_2\sin\phi}{a_1 + a_2\cos\phi}$

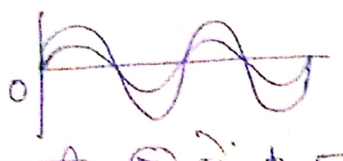
$\Rightarrow \tan\theta = \frac{a_2\sin\phi}{a_1 + a_2\cos\phi}$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{a_2\sin\phi}{a_1 + a_2\cos\phi}$ — (8)

विशेष परिस्थितियाँ (Special Cases):-

(1) यदि $\phi = 0$ या $2\pi n$ ($n = 1 \ldots$ Integer)

$\phi_1 - \phi_2 = 0$



समी॰ (7) में ϕ का मान रखने पर:-

$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2\, 2a_1a_2\cos 0^\circ}$

$\Rightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2}$

$\Rightarrow a = \sqrt{(a_1 + a_2)^2}$

$\Rightarrow a = a_1 + a_2$ — (9)

③

(ii) यदि $\phi = \pi$ या $(2n+1)\pi$ हो $\phi_1 - \phi_2 = \pi$

समी० (9) से

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos 180^\circ}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1 a_2)(-1)}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{(a_1 - a_2)^2}$$

$$\Rightarrow a = a_1 - a_2 \quad \text{—(10)}$$

व्यतिकरण (Interference):- जब लगभग समान आयाम (Amplitude) तथा आवृत्ति (frequency) की दो तरंगें माध्यम में एक ही दिशा में तथा एक ही रेखा में चलती हैं, तो इनके अध्यारोपण से माध्यम के भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर परिणामी आयाम भिन्न-भिन्न होता है, इस घटना को व्यतिकरण (Interference) कहते हैं।

(2) **समान आवृत्ति की एक रेखा में होने वाली दो सरल आवर्त गतियों का अध्यारोपण (Superposition of two Simple Harmonic Oscillation of the same frequency Along the Same line):-**

माना पहले आयाम (Amplitude) का विस्थापन (displacement)

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \phi_1) \quad \text{—(1)}$$

दूसरे आयाम (Amplitude) का विस्थापन (displacement)

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \phi_2) \quad \text{—(2)}$$

(अध्यारोपण के सिद्धांत से) (Due to principal of Superposition)

$$\Rightarrow x = x_1 + x_2$$

$\Rightarrow x = a_1 \sin(\omega t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega t + \phi_2)$

$\Rightarrow x = a_1(\sin\omega t \cos\phi_1 + \cos\omega t \sin\phi_1) + a_2(\sin\omega t \cos\phi_2 + \cos\omega t \sin\phi_2)$

$\Rightarrow x = a_1 \underline{\sin\omega t \cos\phi_1} + a_1 \cos\omega t \sin\phi_1 + \underline{a_2 \sin\omega t \cos\phi_2} + a_2 \cos\omega t \sin\phi_2)$

$\Rightarrow x = \sin\omega t\,(a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2) + \cos\omega t\,(a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin\phi_2)$

माना कि:-

$\Rightarrow a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2 = A\cos\theta$ — (3)

$\Rightarrow a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin\phi_2 = A\sin\theta$ — (4)

$\Rightarrow x = \sin\omega t\, A\cos\theta + \cos\omega t\, A\sin\theta$

$\Rightarrow x = A(\sin\omega t \cos\theta + \cos\omega t \sin\theta)$

$\Rightarrow x = A\sin(\omega t + \theta)$ — (5)

समी० (3) व (4) को वर्ग करके जोड़ने पर:-

$(A\cos\theta)^2 + (A\sin\theta)^2 = (a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2)^2 + (a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2)^2$

$\Rightarrow A^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2)^2 + (a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2)^2$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$\Rightarrow A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\phi_1 - \phi_2)$ — (6)

समी० (4) में (3) का भाग देने पर:-

$$\Rightarrow \frac{\cancel{A}\sin\theta}{\cancel{A}\cos\theta} = \frac{a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2}{a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2}{a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2}$$

$$\Rightarrow \cancel{\tan}\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin\phi_2}{a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2}\right) \quad \text{—} (7)$$

(विशेष परिस्थितियाँ) Special Cases :-

(1) यदि $\phi_1 - \phi_2 = 0$

तो समी॰ (6) से -

$$\Rightarrow A_{max} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2}$$

$$\Rightarrow A_{max} = \sqrt{(a_1 + a_2)^2}$$

$$\Rightarrow A_{max} = a_1 + a_2 \quad \text{—} (8)$$

(2) यदि $(\phi_1 - \phi_2) = 180°$ या π (या) or $(2n+1)\pi$ जहाँ $n = 1 \dots$ Integer.

$$\Rightarrow A_{min} = a_1 - a_2 \quad \text{—} (9)$$

Lissajou's figures (लिस्साजू आकृतियाँ) :-

(जब लगभग समान आयाम व आवृत्ति की दो तरंगें एक-दूसरे के लम्बवत् अध्यारोपित होती हैं जिसके कारण एक विशेष प्रकार की आकृति निर्मित होती है, जिसे लिस्साजू आकृति कहते हैं।)

When two simple harmonic wave superimpose to each other perpendicular direction then special figure is occur, that is called Lissajou's figure.

माना किसी कण पर एक साथ अध्यारोपित होने वाली X तथा Y अक्ष के अनुदिश सरल आवर्त गतियों के किसी समय t पर विस्थापन समीकरण निम्न है :-

$$x = a \sin(\omega t + \phi) \quad \text{—} (1)$$

$$y = b \sin \omega t \quad \text{—} (2)$$

समी॰ (1) से:-

$\Rightarrow x = a \sin(\omega t + \phi)$

$\Rightarrow x = a(\sin\omega t \cos\phi + \cos\omega t \sin\phi)$ — (3)

पुन: समी॰ (2) से:-

$\Rightarrow y = b \sin\omega t$

$\Rightarrow \sin\omega t = \dfrac{y}{b}$

Squaring both side:-

$\Rightarrow \sin^2\omega t = \dfrac{y^2}{b^2}$ $\Rightarrow \sin\omega t = \sqrt{\dfrac{y^2}{b^2}} = \dfrac{y}{b}$

$\Rightarrow 1 - \cos^2\omega t = \dfrac{y^2}{b^2}$ $\left[\because \sin^2 x = 1 - \cos^2 x\right]$

$\Rightarrow 1 - \dfrac{y^2}{b^2} = \cos^2\omega t$

$\Rightarrow \cos^2\omega t = 1 - \dfrac{y^2}{b^2}$

$\Rightarrow \cos\omega t = \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2}}$ — (4)

समी॰ (3) मे मान रखने पर:-

$\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}\cos\phi + \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2}}\sin\phi$ — (5)

Again Squaring both side:-

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2}\cos^2\phi + \left(1 - \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 \sin^2\phi$ — (6)

समी॰ (5) से:-

$\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\cos\phi\right) = \sin\phi\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{b^2}}$

Squaring both side:- $\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\cos\phi\right)^2 = \sin^2\phi\left(1 - \dfrac{y^2}{b^2}\right)$

(6)

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\cos^2\phi \cancel{+ \sin^2\phi \frac{y^2}{b^2}} - \frac{2xy}{ab}\cos\phi = \sin^2\phi - \sin^2\phi\frac{y^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\cos^2\phi + \sin^2\phi\frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\phi = \sin^2\phi$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) - \frac{2xy}{ab}\cos\phi = \sin^2\phi$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\phi = \sin^2\phi \quad \text{--- (7)}$$

(~~समी० (7) दीर्घवृत्त~~ का समी० है)

Equation (7) is the equation of Ellipse.

(~~विशेष परिस्थितियाँ~~) Special Cases :-

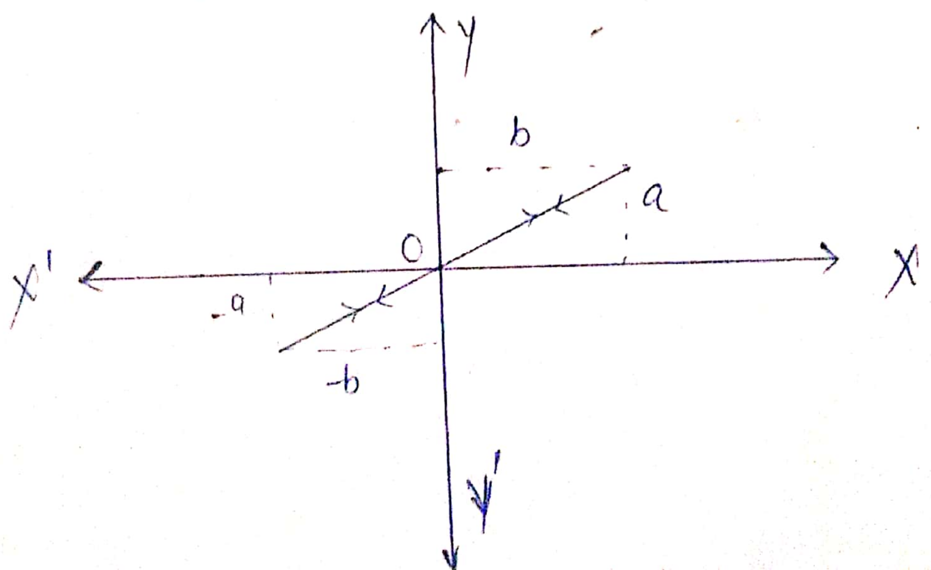
(1) जब $\phi = 0$

समी० (7) से :- $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \pm\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

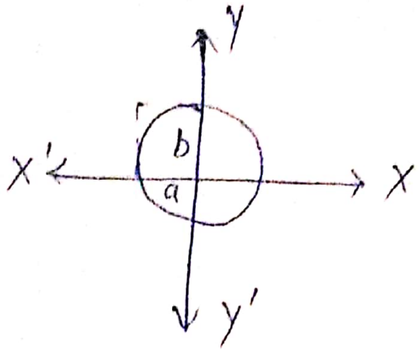
$\Rightarrow x = a$	$\Rightarrow -x = a$
$\Rightarrow y = b$	$\Rightarrow -y = b$



(2) जब $\phi = 90^\circ$

समी॰ (7) से :-

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



यदि $a = b$ तब

$$x^2 + y^2 = 1$$

(3) जब $\phi = 180^\circ$

समी॰ (7) से :-

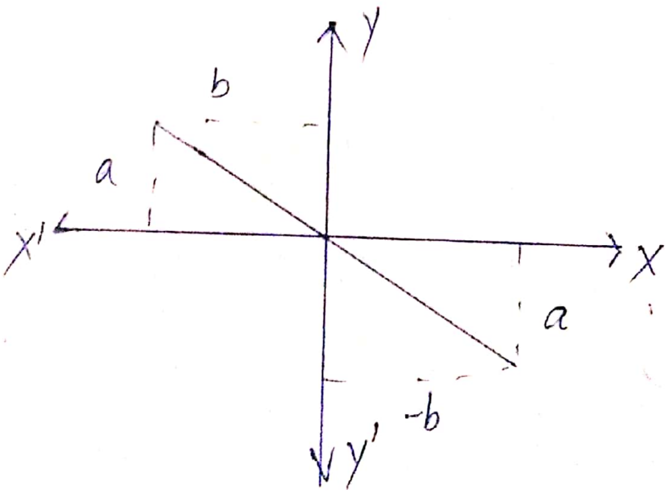
$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2xy}{ab} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{-y}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{bx}{a} = -y$$

$$\Rightarrow y = -\frac{bx}{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|c} x = a & -x = a \\ -y = b & y = b \end{array}$$



(उपयोग) uses :- ① अज्ञात आवृत्ति का मान ज्ञात करना।

② दो सरल आवर्त गतियों के आवर्तकालों की निष्पत्ति ज्ञात करना।

③ कपड़ा उद्योग में छपाई की सुन्दर डिजाइनें बनाने में।

④ लॉकेट के सुन्दर डिजाइनों में।

D.H.O Damped Harmonic Oscillation

$F_1 \propto -x \Rightarrow F_1 = -cx$

$F_2 \propto -v \Rightarrow F_2 = -\gamma v$

$F = ma \qquad \left[\because a = \frac{d^2x}{dt^2},\ v = \frac{dx}{dt}\right]$

$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma v - cx$

$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma v + cx = 0$ [deviding by m]

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma v}{m} + \frac{c}{m}x = 0$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2Kv + \omega_0^2 x = 0$ —① $\left[\because \frac{c}{m} = \omega_0^2,\ \frac{\gamma}{m} = 2K\right]$

माना $x = A\sin(Pt - \theta)$

अवकलन करने पर :-

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = PA\cos(Pt - \theta)$ —Ⓐ A = Amplitude constant

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -P^2A\sin(Pt - \theta)$

समी० ① में मान रखने पर :-

$\Rightarrow -P^2A\sin(Pt - \theta) + 2KPA\cos(Pt - \theta) + \omega_0^2 A\sin(Pt - \theta) = 0$

If $Pt - \theta = 0$ then

$\Rightarrow 2KPA = 0$ —②

(4)

Driven or forced Harmonic Oscillations :-

यदि damped Harmonic oscillations पर एक बाहरी आवर्ती बल $F = F_0 \sin Pt$ कार्य करता है। जो damping बल के बराबर तथा विरुद्ध हो तो दोलन तन्त्र driven or forced harmonic oscillation कहलाता है।

दोलन तन्त्र का समीकरण :-

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{dx}{dt} - cx + F \quad \text{--- (1)}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{c}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin Pt$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2K\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin Pt \quad \text{--- (2)}$$

where $2K = \frac{\gamma}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 2\pi\nu_0$, $\frac{F_0}{m} = f_0$

समी॰ (2) driven harmonic oscillation का अवकल समीकरण है।

माना $x = A\sin(Pt - \theta)$

A = Amplitude constant

$$\therefore \frac{dx}{dt} = PA\cos(Pt - \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -P^2 A\sin(Pt - \theta)$$

eq (2) से :-

$$\Rightarrow -P^2 A\sin(\omega t - \theta) + 2KPA\cos(Pt - \theta) + \omega_0^2 A\sin(Pt - \theta) = f_0\sin(\underline{Pt - \theta} + \theta)$$

$$\Rightarrow A(\omega_0^2 - P^2)\sin(Pt - \theta) + 2KPA\cos(Pt - \theta) = f_0\cos\theta \cdot \sin(Pt - \theta) + f_0\sin\theta\cos(Pt - \theta) \quad \text{--- (3)}$$

θ के सभी मानों के लिए सत्य है

स्थिति :- (1) when $(pt-\theta)=0$

समी. (3) से :- $2KPA = f_0 \sin\theta$ — (4)

(2) when $(pt-\theta) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow A(\omega_0^2 - p^2) = f_0 \cos\theta$ — (5)

eq (4) एवं (5) को Square करके add करने पर / जोड़ने पर :-

$\Rightarrow 4K^2p^2A^2 + (\omega_0^2 - p^2)^2A^2 = f_0^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$\Rightarrow [4K^2p^2 + (\omega_0^2 - p^2)^2]A^2 = f_0^2$

$$\Rightarrow A = \frac{f_0}{\sqrt{4K^2p^2 + (\omega_0^2 - p^2)^2}} \quad \text{— (6)}$$

eq (4) में (5) को भाग देने पर :-

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{2KP}{\omega_0^2 - p^2}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2KP}{\omega_0^2 - p^2}\right)$$

eq (A) में मान रखने पर :-

$$\Rightarrow x = \frac{f_0}{\sqrt{4K^2p^2 + (\omega_0^2 - p^2)^2}} \sin\left[pt - \tan^{-1}\left(\frac{2KP}{\omega_0^2 - p^2}\right)\right] \quad \text{— (7)}$$

Transient and Steady States :-

क्षणिक तथा स्थायी अवस्थाएँ

eq ⑦ – eq ② का complete Solution नहीं है, Complete Solution होने के लिए $f_0 \sin pt = 0$ होना चाहिए।

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2K\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

यह D.H.O है जिसका हल $x = a_0 e^{-Kt}\sin(\omega t + \phi)$

when $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - K^2}$

अत: eq-② का सम्पूर्ण हल

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4K^2p^2}}\sin(pt-\theta) + a_0 e^{-Kt}\sin(\omega t + \phi) \quad (8)$$

Amplitude and Phase in the steady State :-

स्थायी अवस्था में :-

eq ② का हल $x = A\sin(pt - \theta)$

when $A = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4K^2p^2}}$ and $\tan\theta = \dfrac{2Kp}{\omega_0^2 - p^2}$